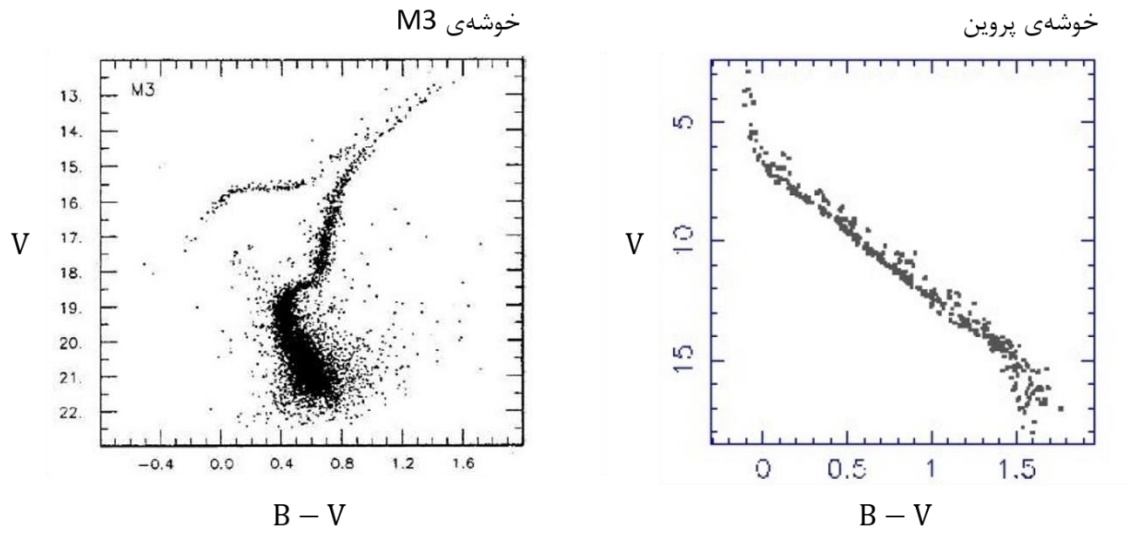
سؤال ۱ (۱۰ نمره)

نمودارهای H-R زیر برای خوشه‌ی پروین و خوشه‌ی کروی M3 هستند.

الف) با استفاده از ستارگان $B - V = ۰/۵$، نسبت فاصله‌ی این دو خوشه را تعیین کنید.

ب) با توجه به نمودار خوشه‌ی M3 تعیین کنید درخشندگی بالاترین ستارگان نمودار، چند برابر درخشندگی پایین‌ترین ستارگان نمودار است.

این شکل جزء پاسخ سوال ۱ می‌باشد.



شکل ۱

سؤال ۲ (۱۰ نمره)

در یک پروژه‌ی رصدی از رادیوتلسکوپ‌های «آرایه‌ی بسیار بزرگ[۱]» برای نقشه‌برداری از سحابی جبار در طول موج ۱۰ سانتی‌متر با فناوری تداخل‌سنجی استفاده شده است. آرایه‌ی بسیار بزرگ از ۲۷ تلسکوپ رادیویی با قطر ۲۵ متر تشکیل شده است. قطر مؤثر این آرایه ۳۶ کیلومتر است.

الف) بهترین توان تفکیکی که می‌توانیم با استفاده از این آرایه به آن دست یابیم چه قدر است؟

ب) اگر بخواهیم با تلسکوپی در ناحیه‌ی مرئی چنین توان تفکیکی به دست آوریم، قطر عدسی یا آینه‌ی اولیه‌ی تلسکوپ چه قدر باید باشد؟

ج) اگر فاصله‌ی کانونی تلسکوپ «قسمت ب» ۲۰۰ cm باشد، مساحت تصویر بخشی از سحابی جبار به پهنای ۱۰ دقیقه‌ی قوسی در آشکارساز تلسکوپ چه قدر خواهد بود؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان
چرک نویس استفاده کنید مطالب این
قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح
نخواهد شد

[۱] Very Large Array (VLA)

سؤال ۳ (۱۵ نمره)

در چه بازه‌ای از عرض دایرة البروجی، می‌توان نقطه‌ای یافت که عرض دایرة البروجی آن با بُعدش برابر باشد؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

سؤال ۴ (۱۵ نمره)

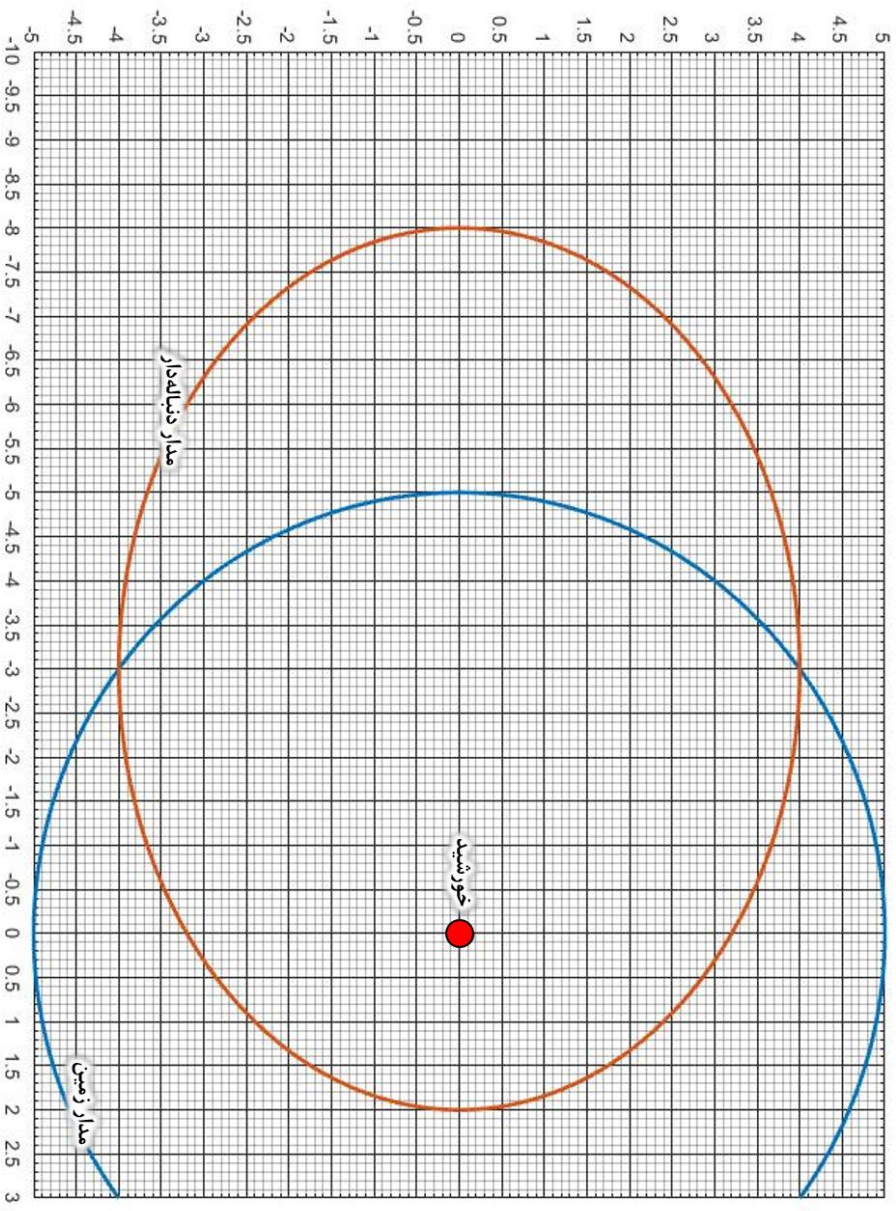
منجمان سیاره‌ای یافته‌اند که دارای یک حلقه‌ی مسطح با ضخامت ناچیز است. شعاع این حلقه با دوره‌ی تناوب ۲ روز، بین ۶ برابر تا ۱۰ برابر شعاع مشتری نوسان می‌کند. بررسی‌های بیشتر نشان داده است که این حلقه از تکه‌سنگ‌هایی تشکیل شده که تحت تاثیر گرانش سیاره‌ی مرکزی به دور آن می‌گردند. جرم سیاره‌ی مرکزی چند برابر جرم مشتری است؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

سؤال ۵ (۲۰ نمره)

شکل ۳ مدار دنباله‌داری را نشان می دهد که در صفحه‌ی دایرة البروج هم‌جهت با زمین به دور خورشید می‌گردد. دنباله‌دار در نیمه شب (ساعت ۰۰:۰۰) روز اول فروردین ۱۳۹۸ در حضیض مدار خود دیده شده است. مکان دنباله دار در مدارش را در تاریخ هفتم خرداد (ساعت ۰۰:۰۰) امسال بر روی شکل ۳ با علامت ستاره (*) مشخص کنید.

این شکل جزء پاسخ سوال ۵ می‌باشد.



شکل ۳

سؤال ۶ (۲۵ نمره)

بر اساس نظریه‌های تشکیل ساختار، اندکی پس از زمان بازترکیب و جدا شدن ماده و تابش، ماده‌ی باریونی شروع به رمبش کرده است. این اتفاق باعث شکل‌گیری ساختارهای کیهانی شده است.

چگالی مادی باریونی در حال حاضر $\Omega_b = ۲/۲۷۳ \times ۱۰^{-۲}$ و قرمزگرایی در زمان بازترکیب حدود ۱۱۰۰ است.

الف) حداقل جرم توده‌ای کروی‌شکل از ماده‌ی باریونی که بلافاصله پس از زمان بازترکیب به دلیل برقرار نبودن تعادل می‌تواند برمبد چه قدر است؟

ب) پاسخ قسمت قبل به جرم کدام یک از ساختارهای زیر نزدیک‌تر است؟

خوشه‌ی ستاره‌ای　　کهکشان　　گروه کهکشانی　　خوشه‌ی کهکشانی

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان
چرک نویس استفاده کنید مطالب این
قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح
نخواهد شد

سؤال ۷ (۳۰ نمره)

رصدگری یک ستاره را در سه زمان مختلف در طول سال در نزدیک قطب شمال دایرة البروجی رصد کرده است. او مختصات استوایی ستاره را با ابزاری که دقت آن یک میلیونیوم درجه است به دست آورده است. مختصات این ستاره پس از اصلاح اثر ابیراهی در جدول زیر آمده است.

جدول ۱

میل (درجه)	بعد (درجه)
۶۶٫۵۶۱۲۷۱	۲۷۰٫۰۰۰۵۸۶
۶۶٫۵۶۱۲۷۴	۲۷۰٫۰۰۰۵۳۱
۶۶٫۵۶۱۲۵۰	۲۷۰٫۰۰۰۵۵۶

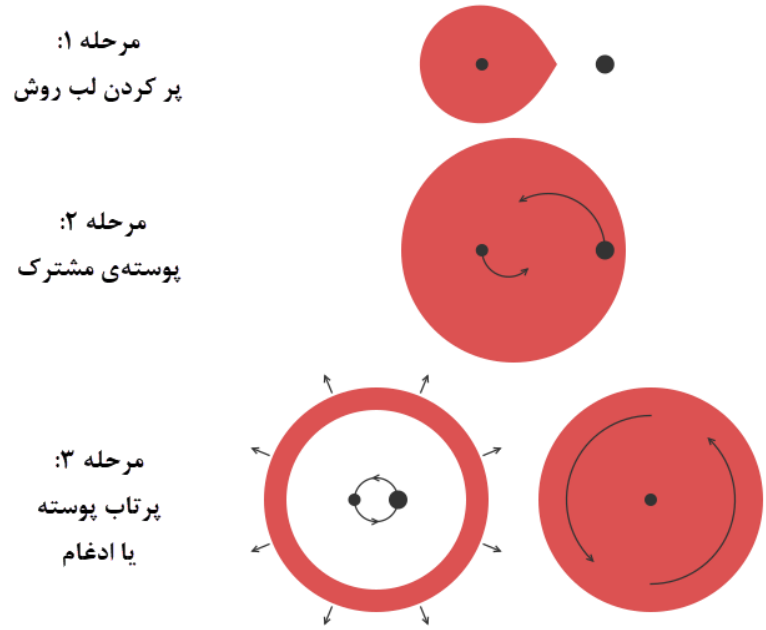
فاصله‌ی این ستاره از خورشید بر حسب سال نوری چه قدر است؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

سؤال ۸ (۲۵ نمره)

گروهی از ستارگان دوتایی که ستارگان دوتایی کوتاه‌دوره نام دارند، دارای دوره‌ی تناوب چندین ساعت تا یک روز هستند و از مؤلفه‌های فشرده‌ای تشکیل شده‌اند که قبلاً هسته‌ی ستاره‌های غول بوده‌اند. طبق نظریه‌ی استاندارد شکل‌گیری این ستاره‌ها، در سیستم‌های دوتایی که جرم مؤلفه‌هایشان برابر نیست، ستاره‌ی سنگین‌تر زودتر تبدیل به غول شده و در شاخه‌ی غول سرخ (RGB) یا شاخه‌ی غول مجانبی (AGB) لُب روش[۱] خود را پر می‌کند. در نتیجه جرم آن به ستاره‌ی سبک‌تر برافزوده می‌شود.

به دلیل آهنگ بالای انتقال جرم، در مدّت زمان کوتاهی تعادل دینامیکی ستاره‌ی همدم به هم می‌خورد؛ به طوری که این ستاره نیز منبسط شده و لب روش خود را پر می‌کند. در نهایت پوسته‌ی ستاره‌ی غول، کلّ سیستم دوتایی را در بر می‌گیرد (مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک[۲]). نیروی اصطکاکی که توسّط پوسته‌ی مشترک به هسته‌ی ستاره‌ها وارد می‌شود، منجر به کاهش انرژی مداری و تکانه‌ی زاویه‌ای مداری سیستم دوتایی و انتقال آن به پوسته‌ی مشترک می‌شود؛ در نتیجه فاصله‌ی هسته‌ها کاهش می‌یابد. در صورتی که پوسته‌ی مشترک پیش از ادغام هسته‌ها، انرژی کافی را دریافت کند، به بیرون رانده شده و به شکل سحابی سیّاره‌ای درمی‌آید.



شکل ۴ – مراحل تحوّل پوسته‌ی مشترک

---

[۱] Roche Lobe

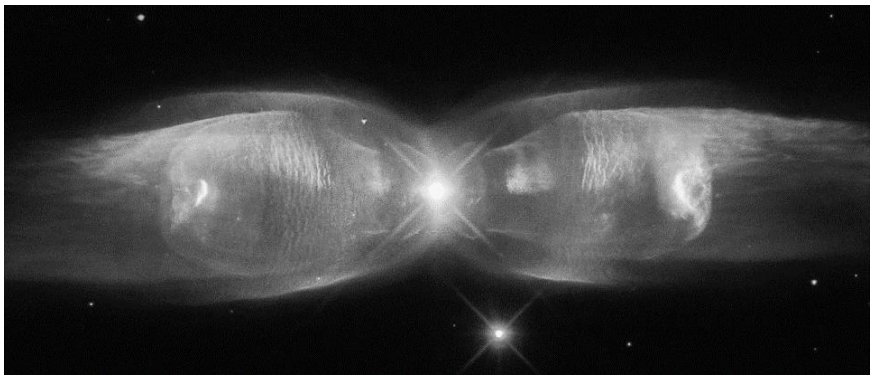
[۲] Common Envelope

الف) مسیر تحوّلی تقریبی یک ستاره‌ی جرم میانه را روی نمودار H-R رسم کنید و مراحل زیرغول[۱] (SG)، شاخه‌ی غول سرخ[۲] (RGB) و شاخه‌ی غول مجانبی[۳] (AGB) را روی آن نشان دهید.

در مطالعات آماری جمعیت‌های ستاره‌ای، از یک عبارت ساده برای ارتباط دادن پارامترهای مداری پیش و پس از مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک استفاده می‌شود:

$$\frac{GM_۱M_{\rm env}}{R} = \alpha_{\rm CE}(E_i - E_f)$$

که در آن E_i انرژی مداری اوّلیّه، E_f انرژی مداری نهایی و $\alpha_{\rm CE}$ ضریبی بین ۰ و ۱ است (ضریب کارایی انتقال انرژی). عبارت سمت چپ انرژی بستگی اوّلیّه‌ی پوسته‌ی ستاره‌ی غول است و در آن $M_۱$ جرم کلّ ستاره، R شعاع آن و $M_{\rm env}$ جرم پوسته است.



شکل ۵ – در مرکز سحابی پروانه (M2-9) یک سیستم دوتایی دیده می‌شود.

ب) یک سیستم دوتایی با دوره‌ی تناوب مداری ۵۵۰ روز، شامل ستاره‌ای غول با جرم $۲/۴\ M_\odot$ و جرم هسته‌ی $۰/۶\ M_\odot$ و ستاره‌ی همدم با جرم $۰/۵\ M_\odot$ در مرحله‌ی رشته‌ی اصلی است. اگر ستاره‌ی غول، تمام لب روش خود تا نقطه‌ی $L_۱$ را پر کند، دوره‌ی تناوب مداری سیستم پس از مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک را حساب کنید ($\alpha_{\rm CE} = ۰/۲$).

فاصله‌ی ستاره‌ی همدم ($M_۲$) از نقطه‌ی $L_۱$ بر حسب فاصله‌ی ستاره‌ها (a) و نسبت جرمی ($q = \frac{M_۲}{M_۱}$) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$f(q) = \frac{R_{L,۲}}{a} \approx \frac{۰/۴۹\ q^{\frac{۲}{۳}}}{۰/۶۰\ q^{\frac{۲}{۳}} + \log_e(۱ + q^{\frac{۱}{۳}})}$$

---

[۱] Subgiant

[۲] Red Giant Branch

[۳] Asymptotic Giant Branch

سؤال ۹ (۳۰ نمره)

از یک نقطه روی کره شروع به حرکت می‌کنیم، بعد از طی کردن کمانی به طول θ، به اندازه‌ی θ به سمت راست می‌چرخیم و مجدداً طول θ را طی می‌کنیم. اگر پس از n بار تکرار کردن این عمل، دوباره به نقطه‌ی اولیه برگردیم، رابطه‌ی θ با n را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس استفاده

کنید مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی تصحیح

نخواهد شد

سؤال ۱۰ (۳۵ نمره)

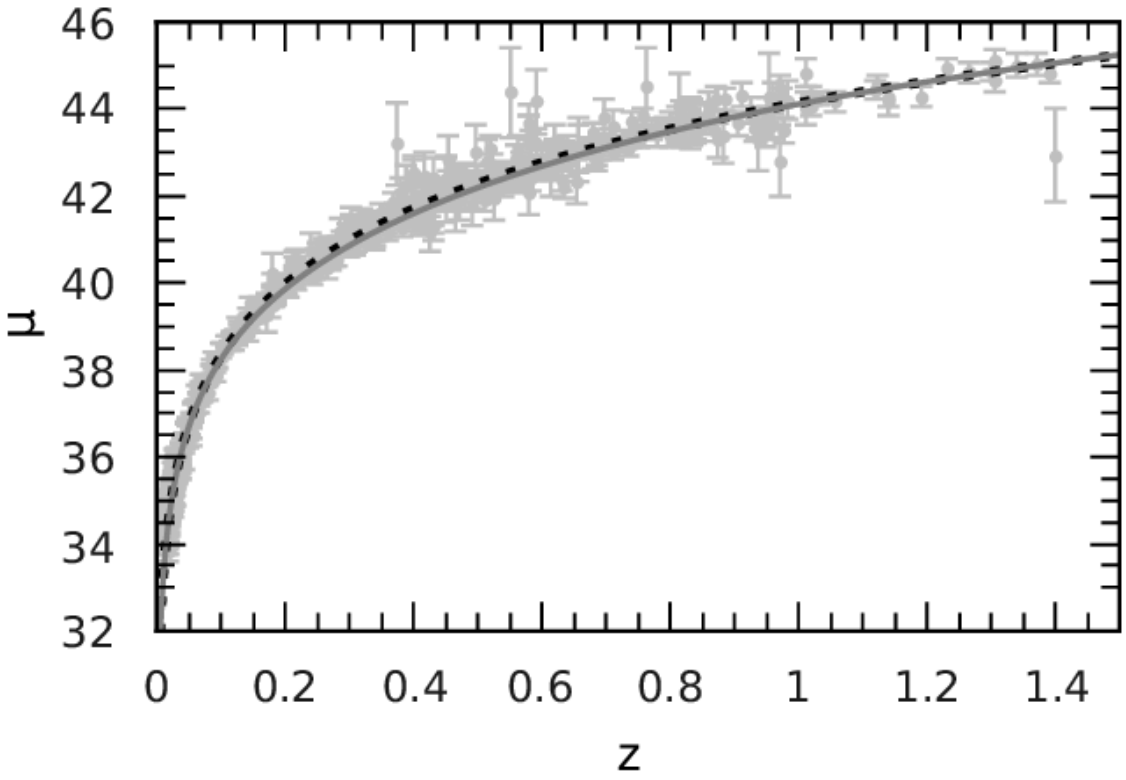
کهکشان HDF4-474 یک کهکشان مارپیچی با قرمزگرایی هابلی ۱/۱ است و به صورت لبه-نما[1] دیده می‌شود. داده‌های خام زیر توسط رصدخانه‌ی فضایی EHR با طیف‌سنجی از ابرهای هیدروژنی این کهکشان به دست آمده است. اثر حرکت ماهواره بر داده‌ها تصحیح شده است.

جدول ۲

#	فاصله‌ی زاویه‌ای از مرکز (ثانیه‌ی قوسی)	قرمزگرایی
۱	۰/۰۴۸	۱/۱۰۲۳۳۱
۲	۰/۱۹۲	۱/۱۰۲۵۸۳
۳	۰/۳۲۴	۱/۱۰۲۸۶۳
۴	۰/۴۵۶	۱/۱۰۲۹۷۵
۵	۰/۸۶۳	۱/۱۰۳۰۳۸
۶	۱/۲۱۱	۱/۱۰۳۰۰۳
۷	۱/۴۳۹	۱/۱۰۰۹۱۰
۸	۱/۸۸۳	۱/۱۰۳۰۱۷
۹	۲/۴۳۴	۱/۱۰۰۹۲۴
۱۰	۳/۲۸۶	۱/۱۰۰۸۹۶

منحنی دوران کهکشان HDF4-474 (سرعت دوران بر حسب فاصله از مرکز کهکشان) را در پاسخ‌نامه (شکل ۷) رسم کنید.

[1] Edge-on

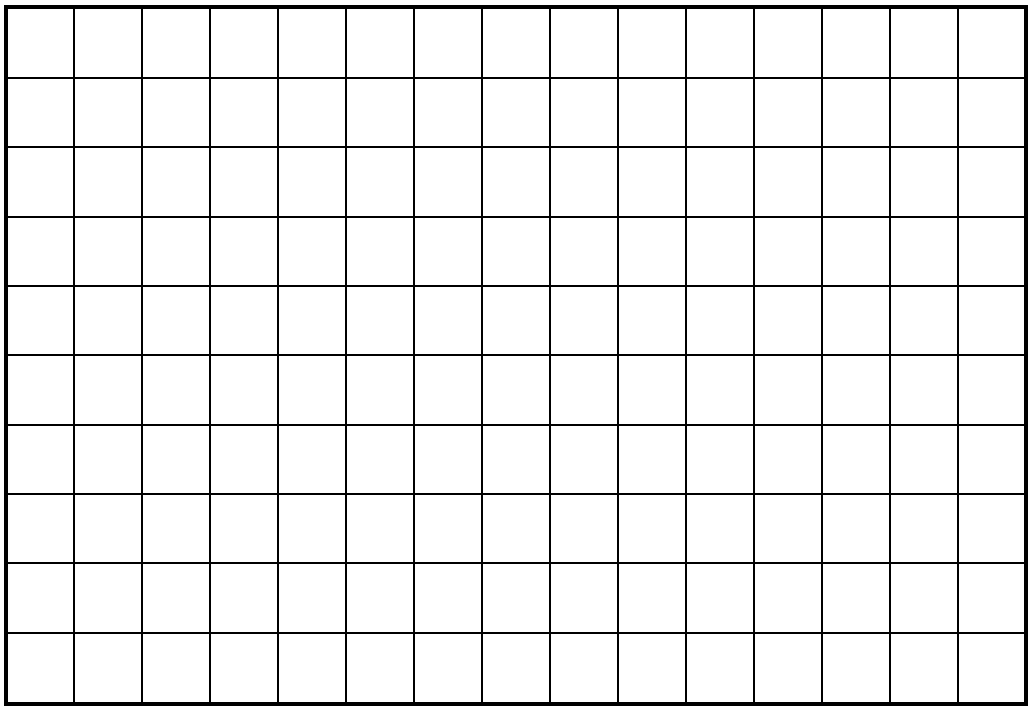


شکل ۶ – نمودار مدول فاصله ($\mu = m - M$) بر حسب قرمزگرایی (z) برای مدل استاندارد کیهان‌شناسی (منحنی خط‌چین)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

این شکل جزء پاسخ سوال ۱۰ می‌باشد.

منحنی دوران کهکشان HDF4-474



شکل ۷

به نام یکتای درکمال

ماخ

پانزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

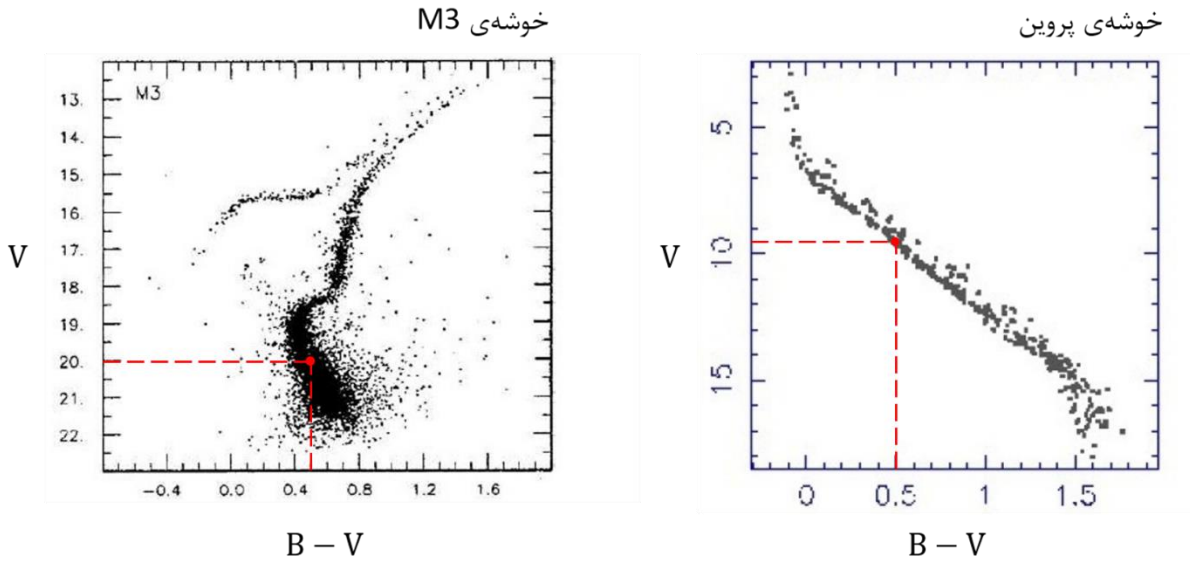
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی آزمون مرحله ۲

۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸ (ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۷:۳۰)

ممکن است روش‌های درست دیگری نیز برای حلّ این سؤالات وجود داشته باشد.

سؤال ۱ (۱۰ نمره)

الف) درخشندگی ستارگان رشته‌ی اصلی با $B-V=0.5$ برابر است. بنابراین:

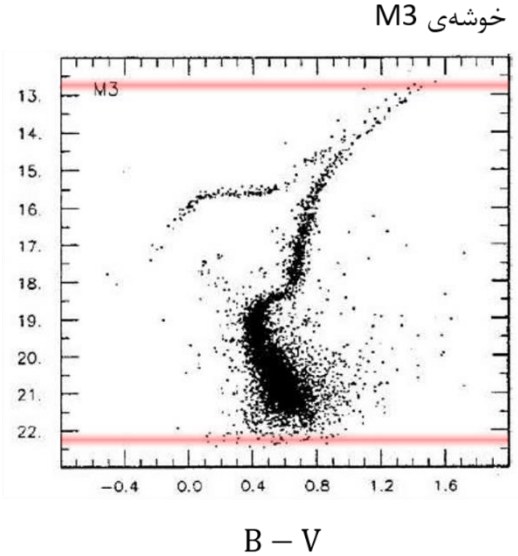


شکل ۱

$$V_{M3}-V_{Pl}=2.5\log\left(\frac{d_{M3}}{d_{Pl}}\right)^2 \quad ; \quad V_{M3}=20.0 \quad , \quad V_{Pl}=9.5$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d_{M3}}{d_{Pl}}=125}$$

ب) با استفاده از نمودار خوشه‌ی M3، اختلاف قدر ظاهری بالاترین ستارگان نمودار و پایین‌ترین ستارگان نمودار را به دست می‌آوریم. با توجه به این که فاصله‌ی این ستارگان برابر است:



شکل ۲

$$\Delta V=-2.5\log\frac{L_{min}}{L_{max}} \quad ; \quad \Delta V\approx 9.5$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L_{max}}{L_{min}}=6300}$$

سؤال ۲ (۱۰ نمره)

الف) از رابطه‌ی توان تفکیک استفاده می‌کنیم.

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D_{\text{eff}}} \quad ; \quad \lambda = 10\ \text{cm} \quad , \quad D_{\text{eff}} = 36\ \text{km}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 3.39 \times 10^{-6}\ \text{rad} = 0.70''}$$

ب)

$$\frac{\lambda}{D_{\text{eff}}} = \frac{\lambda_V}{D} \Rightarrow \boxed{D = 19.8\ \text{cm}}$$

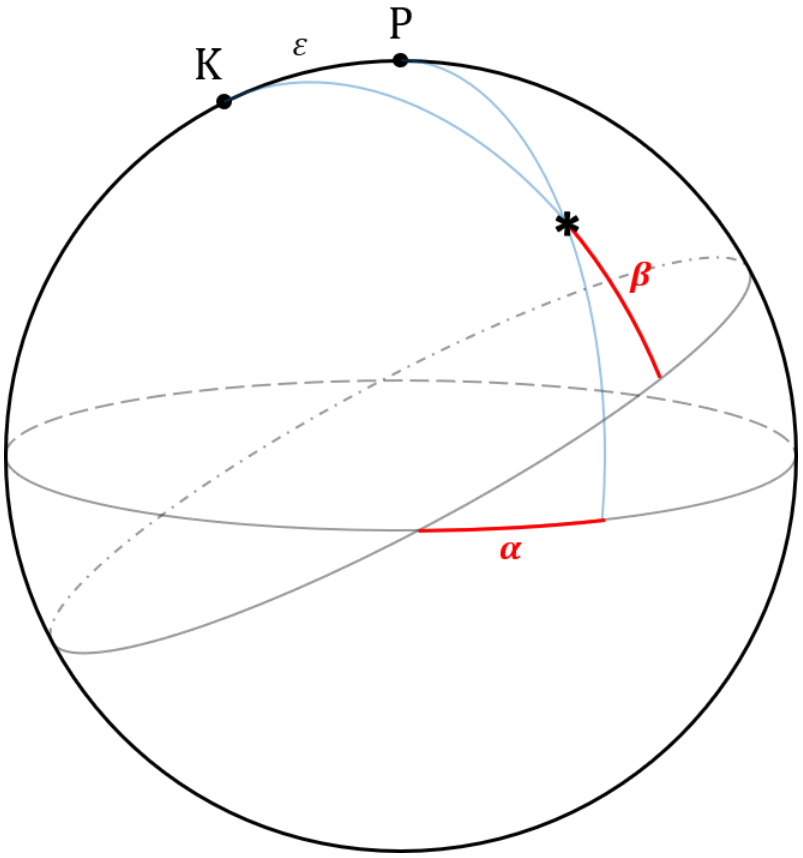
ج) باید مساحت تصویر مربعی به ضلع ۱۰ دقیقه‌ی قوسی در صفحه‌ی کانونی تلسکوپ قسمت «ب» را به دست آوریم. با فرض $\theta \ll 1$:

$$s \approx F\theta \quad ; \quad F = 200\ cm \quad , \quad \theta = 10' \quad \Rightarrow \quad s = 0.58\ \text{cm}$$

$$A = s^2 \Rightarrow \boxed{A = 0.34\ \text{cm}^2}$$

سؤال ۳ (۱۵ نمره)

شکل زیر، نمونه‌ای از نقطه‌ای که بُعد آن با عرض دایرهٔ البروجی‌اش برابر است را نشان می‌دهد.



شکل ۳

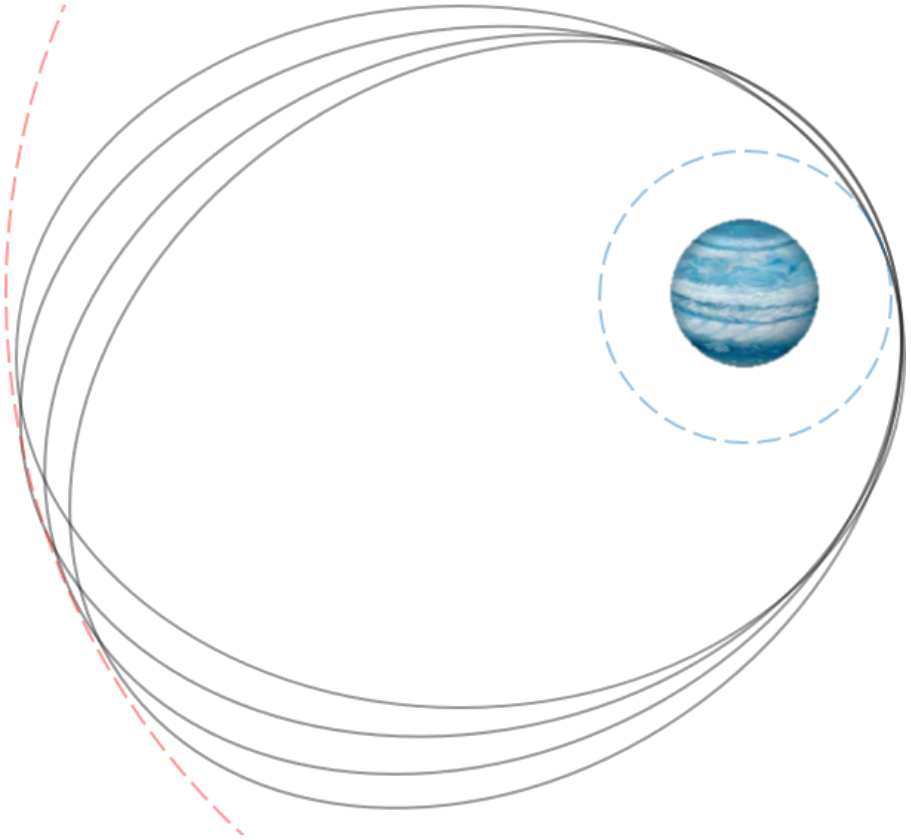
با جابه‌جا کردن این نقطه بر روی کره‌ی سماوی با حفظ شرط فوق، متوجه می‌شویم که عرض دایرهٔ البروجی چنین نقطه‌ای نمی‌تواند بیشتر از $90° - \varepsilon$ باشد. بنابراین:

در صورتی که بعد از صفر تا ۳۶۰ درجه تغییر کند: $\boxed{0 \leq \beta \leq 66°.6}$

در صورتی که بعد از ۱۸۰- تا ۱۸۰ درجه تغییر کند: $\boxed{-66°.6 \leq \beta \leq 66°.6}$

سؤال ۴ (۱۵ نمره)

ذرات تشکیل دهنده‌ی حلقه، همگی در مدارهای بیضوی با شعاع حضیض ۶ برابر شعاع مشتری و شعاع اوج ۱۰ برابر شعاع مشتری به دور سیاره‌ی مرکزی در حال گردش هستند (مطابق شکل).



شکل ۴ (برای ایجاد شهود بهتر، شکل با مقیاس متفاوتی رسم شده است.)

نیم قطر اطول مدار ذرات حلقه به دست می‌آید:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 8\ R_j$$

با استفاده از قانون سوم کپلر:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow M = 3.47 \times 10^{27}\ \text{kg} \Rightarrow \boxed{M = 1.83\ M_j}$$

سؤال ۵ (۲۰ نمره)

با توجه به شکل:

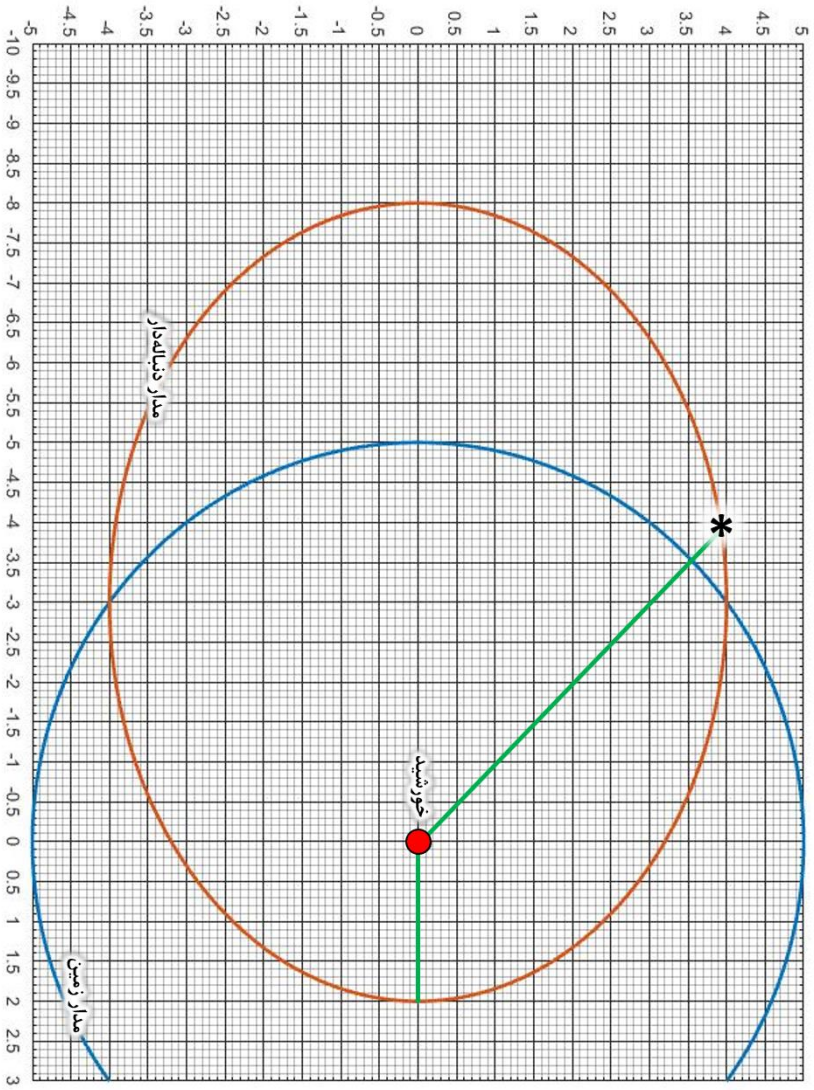
$$a = 1\ \text{AU} \quad , \quad e = 0.6$$

بازه‌ی زمانی مورد نظر (نیمه شب اول فروردین تا نیمه شب هفتم خرداد) برابر با ۶۸ روز است. با استفاده از معادله‌ی کپلر می‌توان زاویه‌ی آنومالی خروج از مرکزی را محاسبه کرد:

$$\frac{2\pi}{T}t = E - e\sin E \Rightarrow E = 1.76\ \text{rad} = 101°$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 135°}$$

مکان دنباله‌دار در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵

سؤال ۶ (۲۵ نمره)

الف) قضیه‌ی ویریال، شرایط انرژی یک مجموعه‌ی دارای تعادل دینامیکی را توصیف می‌کند:

$$2K + U = 0$$

اگر تعادل دینامیکی به هم بخورد و مجموعه شروع به رمبش کند:

$$2K + U < 0 \quad ; \quad K = \frac{3}{2}\frac{M}{\bar{m}}kT \quad , \quad U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{kT}{\bar{m}} < \frac{1}{5}\frac{GM}{R} \quad ; \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{5kT}{G\bar{m}} < M\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{1/3} \Rightarrow M > \left(\frac{5kT}{G\bar{m}}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

به عبارتِ

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\bar{m}}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

که حداقل جرم یک مجموعه‌ی در حال رمبش با جرم متوسط $\bar{m}$، دمای T و چگالی ρ است، جرم جینز گفته می‌شود. با فرض این که ذرات سازنده‌ی کیهان هیدروژن هستند:

$$\bar{m} = m_p$$

> **نکته:** به دلیل رخ دادن هم‌جوشی مِهبانگ[1]، در لحظه‌ی بازترکیب، ماده‌ی باریونی کیهان شامل حداقل ٪۲۴ هلیوم بوده است. می‌توان با در نظر گرفتن این واقعیت، مقدار دقیق‌تری برای $\bar{m}$ به دست آورد.

دمای فوتون‌ها در زمان بازترکیب را از رابطه‌ی دمای تابش و ضریب مقیاس به دست می‌آوریم.

$$T = \frac{T_0}{a} \Rightarrow T = T_0(1+z) \quad ; \quad z = 1100$$

برای ماده‌ی باریونی، تابعیت چگالی و ضریب مقیاس به صورت زیر است ($\Omega_{b,0} = 2.273 \times 10^{-2}$):

$$\rho = \rho_{b,0}a^{-3} = \rho_{b,0}(1+z)^3 \quad , \quad \rho_{b,0} = \Omega_{b,0}\,\rho_{c,0} = \Omega_{b,0}\,\frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

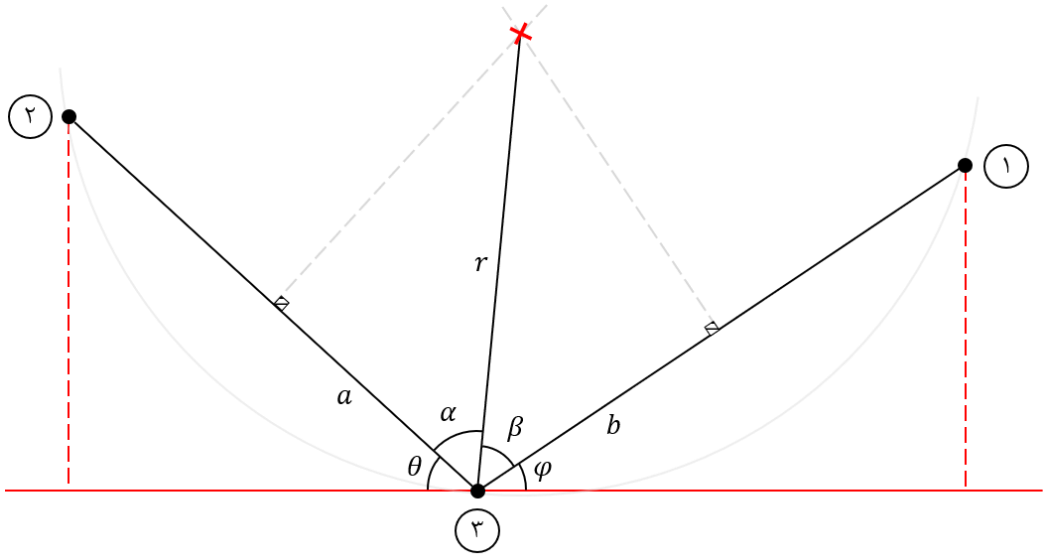
$$\Rightarrow \boxed{M_J = 2.26 \times 10^{36}\ \text{kg} = 1.13 \times 10^6\ M_\odot}$$

ب) خوشه‌ی ستاره‌ای

[1] Big Bang Nucleosynthesis

سؤال ۷ (۳۰ نمره)

این ستاره به دلیل اختلاف منظر ناشی از حرکت انتقالی زمین، روی یک دایره جابه‌جا می‌شود. شعاع این دایره برابر با زاویه‌ی اختلاف منظر است. با توجه به کوچک بودن جدایی زاویه‌ای ستاره‌ها، می‌توانیم از هندسه‌ی مسطحه استفاده کنیم.



شکل ۶

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\delta_2 - \delta_3}{(\alpha_3 - \alpha_2)\cos\delta_3}\right] \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\left[\frac{\delta_1 - \delta_3}{(\alpha_1 - \alpha_3)\cos\delta_3}\right]$$

$$\theta = 67°.49 \quad , \quad \varphi = 60°.39$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_2)^2\cos^2\delta_3} = 1°.2989 \times 10^{-5}$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{(\delta_1 - \delta_3)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2\cos^2\delta_3} = 1°.2077 \times 10^{-5}$$

$$(I): \cos\alpha = \frac{a}{r} \qquad (II): \cos\beta = \frac{b}{r} \quad ; \quad \beta = 180 - \eta - \alpha \quad , \quad \eta = \theta + \varphi$$

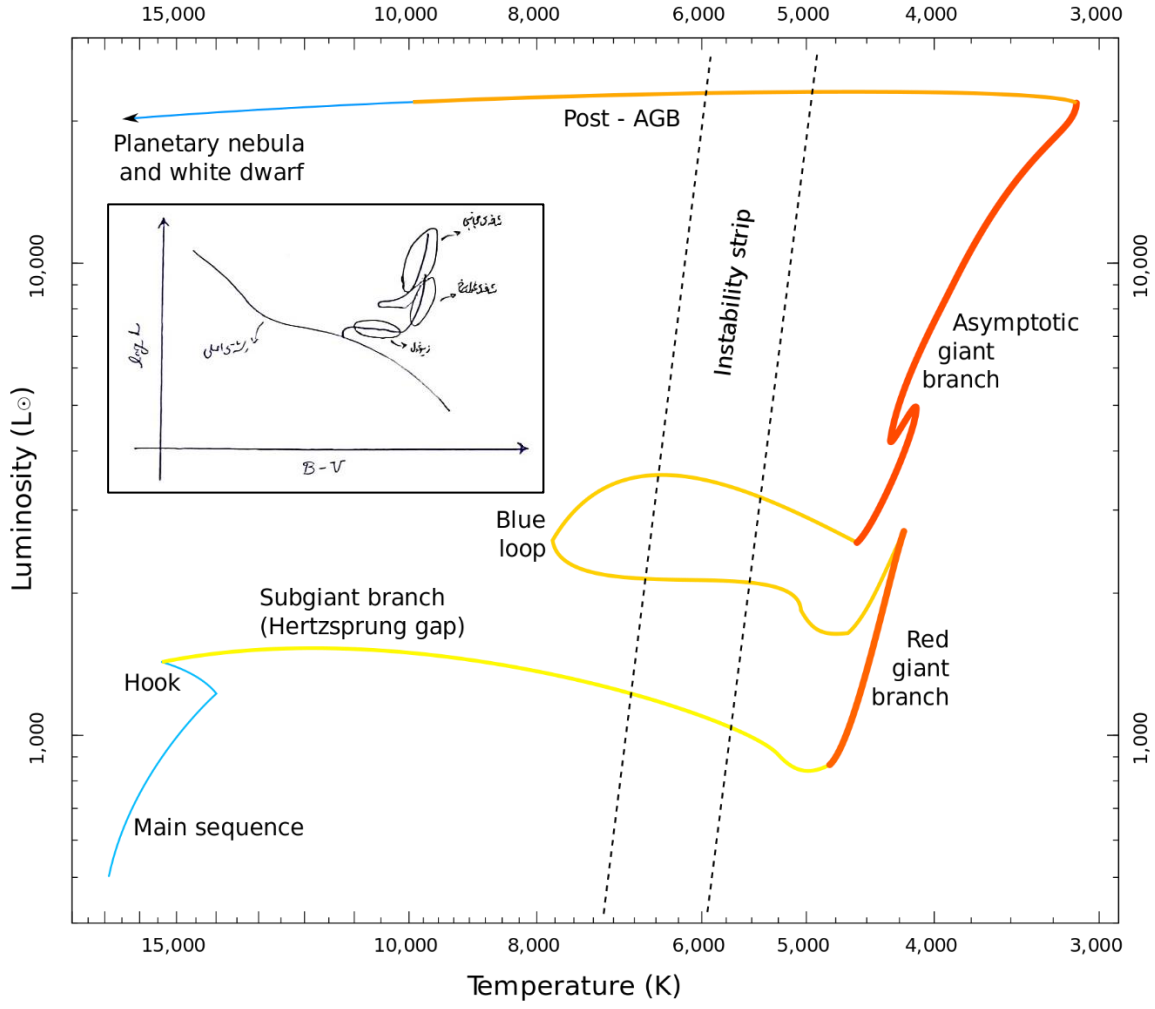
$$\frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{-\cos(\eta + \alpha)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos\eta\cos\alpha - \sin\eta\sin\alpha = -\frac{b}{a}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\cos\eta + \frac{b}{a}\right)\cos\alpha = \sin\eta\sin\alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\eta + {}^{b}/_{a}}{\sin\eta}\right)$$

$$\Rightarrow r = 1°.3987 \times 10^{-5} \Rightarrow d = \frac{1}{r} = 19.9\ \text{pc} \Rightarrow \boxed{d = 64.7\ \text{ly}}$$

سؤال ۸ (۲۵ نمره)

الف) شکل زیر، مسیر تحولی یک ستاره‌ی $5\ M_{\odot}$ را نشان می‌دهد که مراحل زیرغول[۱]، شاخه‌ی غول سرخ[۲] و شاخه‌ی غول مجانبی[۳] بر روی آن مشخص شده‌اند. مسیر تقریبی نیز در کادر نشان داده شده است.



شکل ۷

ب) پارامترهای ارائه شده در صورت سؤال، عبارت‌اند از:

M_1 (جرم ستاره‌ی غول)	M_{core} (جرم هسته‌ی ستاره‌ی غول)	M_{env} (جرم پوسته‌ی ستاره‌ی غول)	M_2 (جرم ستاره‌ی همدم)
$2.4\ M_{\odot}$	$0.6\ M_{\odot}$	$1.8\ M_{\odot}$	$0.5\ M_{\odot}$

---

۱ Subgiant Branch
۲ Red Giant Branch
۳ Asymptotic Giant Branch

با توجه به صورت سؤال:

$$(*) \quad \frac{GM_1M_{\text{env}}}{R} = \alpha_{\text{CE}}\left(E_i - E_f\right) \quad ; \quad \alpha_{\text{CE}} = 0.2$$

برای شروع مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، لازم است ستاره‌ی غول لُب روش خود را پر کند. پس شعاعش در این لحظه برابر با فاصله تا نقطه‌ی L_1 است.

$$R = R_{L,1} = a_i - R_{L,2} = a_i\left[1 - \frac{0.49\, q^{2/3}}{0.60\, q^{2/3} + \log_e\left(1 + q^{1/3}\right)}\right] = 0.75a_i$$

می‌دانیم انرژی مداری از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

در ابتدای مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، ستاره‌ی همدم تقریباً بیرون از ستاره‌ی غول قرار دارد.

$$E_i = -\frac{GM_1M_2}{2a_i}$$

در اواخر مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، ستاره‌ی همدم و هسته‌ی ستاره‌ی غول در حال گردش به دور یک دیگر هستند.

$$E_f = -\frac{GM_{\text{core}}M_2}{2a_f}$$

با جایگذاری در معادله‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$\frac{GM_1M_{\text{env}}}{0.75a_i} = 0.2\left[-\frac{GM_1M_2}{2a_i} + \frac{GM_{\text{core}}M_2}{2a_f}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_i}\left[\frac{GM_1M_{\text{env}}}{0.75} + \frac{GM_1M_2}{10}\right] = \frac{GM_{\text{core}}M_2}{10a_f} \Rightarrow a_f = \frac{M_{\text{core}}M_2}{\frac{M_1M_{\text{env}}}{0.075} + M_1M_2}a_i$$

$$(\times) \quad a_f = \frac{a_i}{196}$$

با داشتن مقدار a_i می‌توانیم a_f را به دست آوریم. برای ارتباط دادن نیم‌قطر اطول و دوره‌ی تناوب از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم:

$$P^2 = \frac{4\pi^2a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

ابتدا a_i را محاسبه می‌کنیم:

$$P_i^2 = \frac{4\pi^2 a_i^3}{G(M_1 + M_2)} \quad ; \quad P_i = 550 \text{ day}$$

$$\Rightarrow a_i = 2.80 \times 10^{11} \text{ m}$$

با جایگذاری در معادله‌ی $(\times)$ خواهیم داشت:

$$a_f = 1.43 \times 10^9 \text{ m}$$

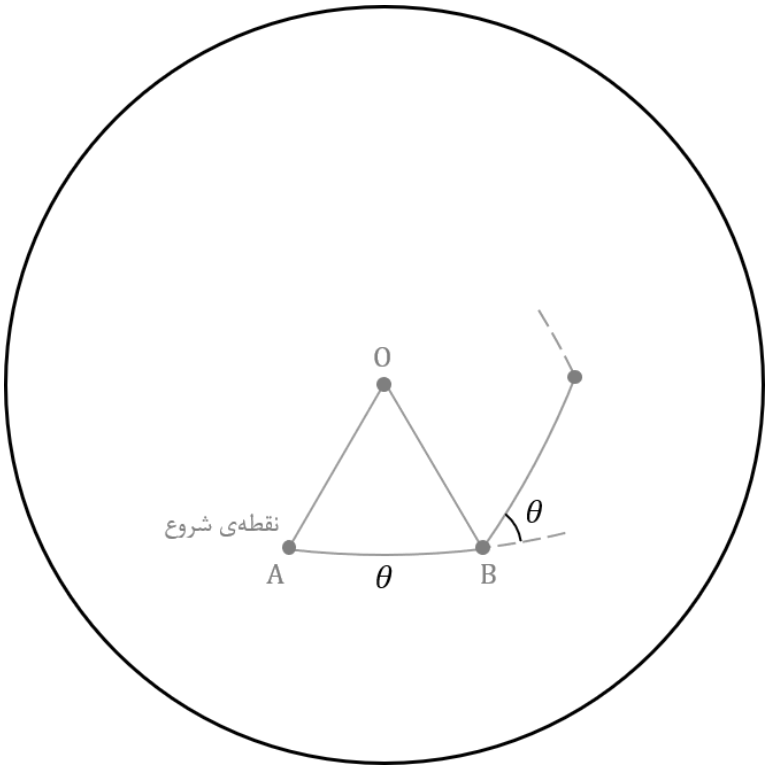
با استفاده از قانون سوم کپلر خواهیم داشت:

$$P_f^2 = \frac{4\pi^2 a_f^3}{G(M_{\text{core}} + M_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_f = 2.81 \times 10^4 \text{ s} = 7.81^{\text{h}}}$$

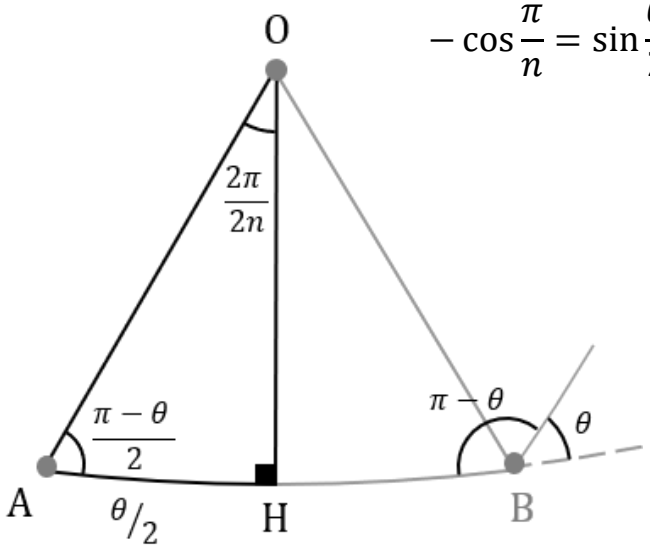
سؤال ۹ (۳۰ نمره)

شکل ؟ مسیر حرکت را روی کره نشان می‌دهد. O مرکز چند ضلعی منتظم است.



شکل ۸

عمود منصف ضلع AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد را H می‌نامیم. طبق رابطه‌ی کسینوس در مثلث قطبی OAH:



شکل ۹

$$-\cos\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\theta}{2}\cos 90° - \cos\frac{\theta}{2}\sin 90°\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{n} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 2\cos^{-1}\left[\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}\right]}$$

سؤال ۱۰ (۳۵ نمره)

محاسبه‌ی فاصله از مرکز کهکشان

برای تبدیل زاویه‌های داده شده به طول، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$R = \theta d_A$$

R و θ به ترتیب، فاصله و جدایی زاویه‌ای از مرکز کهکشان هستند. d_A (فاصله‌ی قطر زاویه‌ای) از رابطه‌ی

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن فاصله‌ی درخشندگی (d_L) از نمودار مدول فاصله کمک می‌گیریم:

$$\mu = 5\log d_L - 5 \Rightarrow d_A = 1720\ \text{Mpc}$$

محاسبه‌ی سرعت خاصه

از رابطه‌ی ترکیب قرمزگرایی‌ها می‌دانیم:

$$1 + z_{tot} = (1+z_H)(1+z_p) \quad ; \quad z_H = 1.1$$

که در آن z_{tot} قرمزگرایی کل، z_H قرمزگرایی هابلی و z_p قرمزگرایی ناشی از حرکت خاصه است. با تصحیح اثر انبساط هابلی می‌توانیم سرعت خاصه‌ی هر کدام از ابرهای هیدروژنی را بیابیم ($v_p = z_p c$):

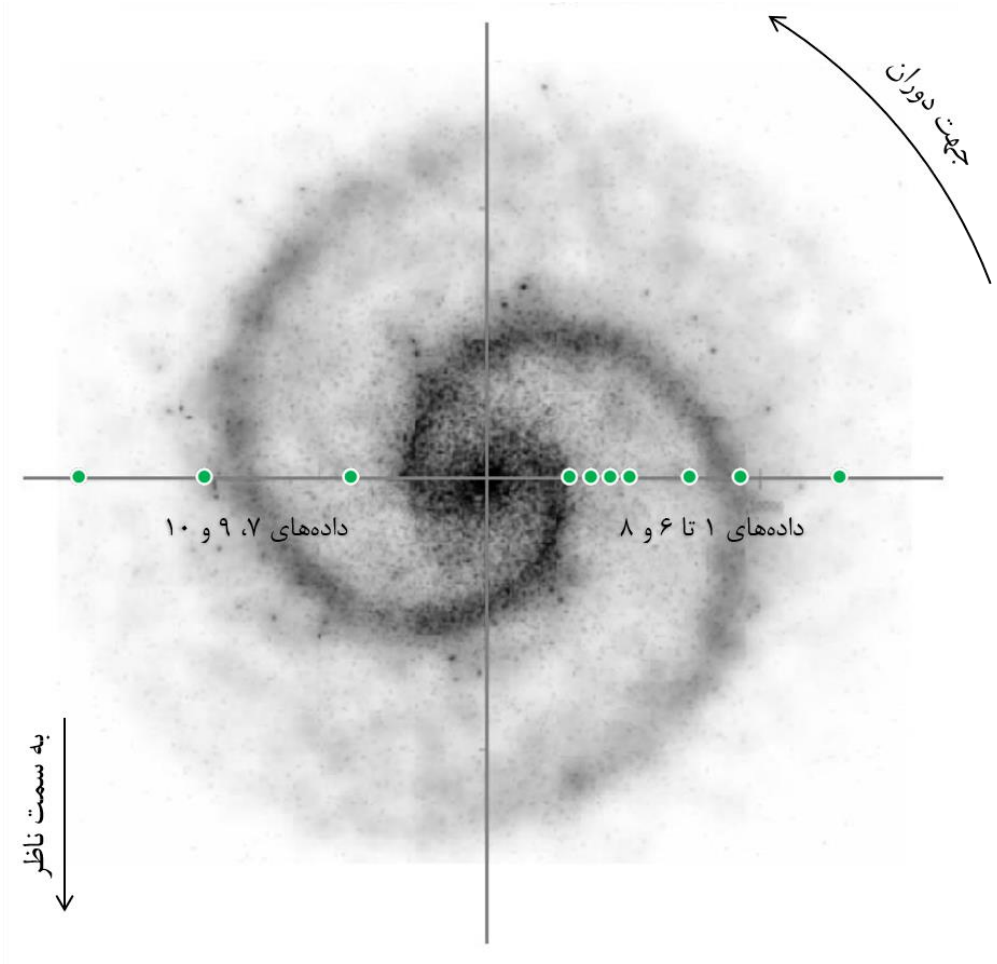
#	فاصله از مرکز (kpc)	سرعت خاصه (km s^{-1})
۱	0.40	333
۲	1.60	369
۳	2.70	409
۴	3.80	425
۵	7.20	434
۶	10.10	429
۷	12.00	130
۸	15.70	431
۹	20.30	132
۱۰	27.40	128

محاسبه و تصحیح سرعت شعاعی کهکشان

مقادیر سرعت خاصه شامل سرعت شعاعی کهکشان و سرعت دورانی هستند.

$$v_p = v_{rot} + v_r$$

برای رسم منحنی دوران، لازم است سرعت شعاعی کهکشان را به دست آوریم و از سرعت خاصه کم کنیم. با توجه به داده‌ها منحنی دوران از داده‌ی شماره‌ی ۵ به بعد، تخت شده است. سرعت دورانی این ابرها با هم برابر است، اما به دلیل این که در طرفین کهکشان قرار گرفته‌اند، تعدادی از نقاط به سمت ناظر حرکت می‌کنند و تعدادی از آن دور می‌شوند (مطابق شکل).



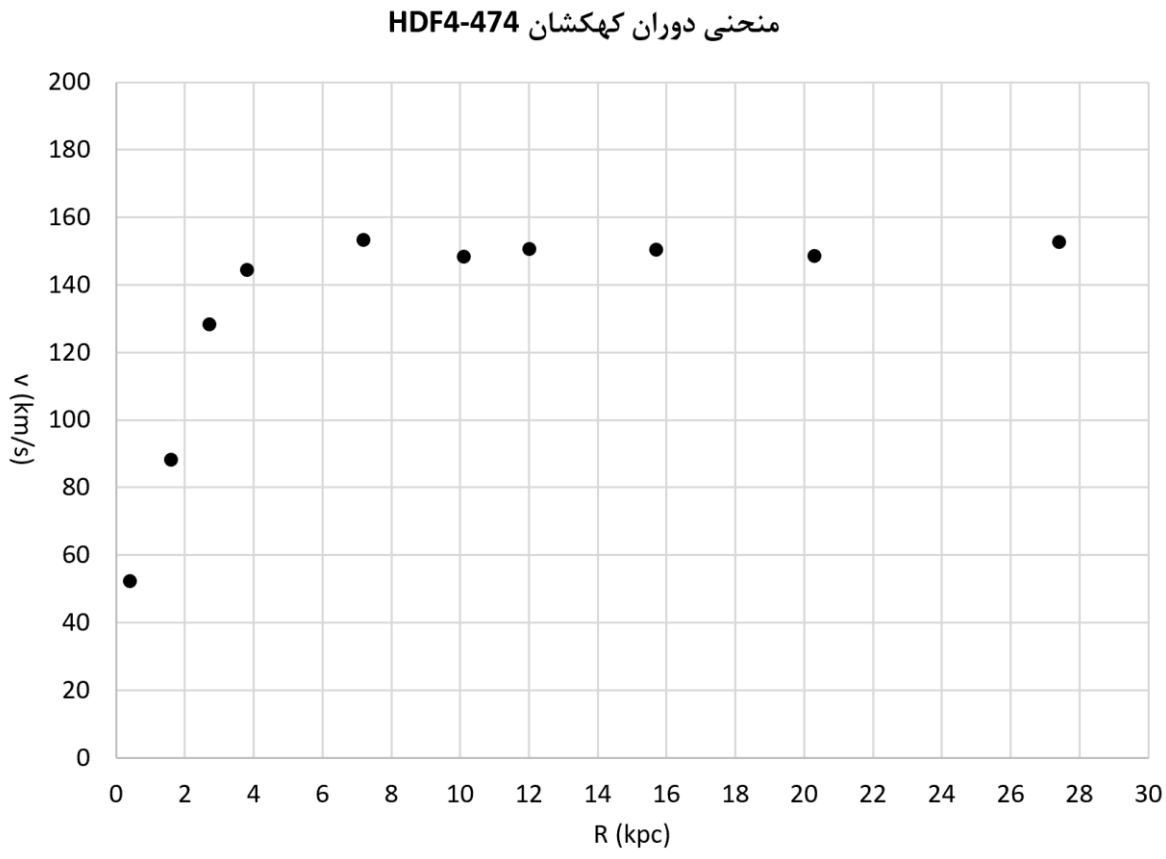
شکل ۱۰

سرعت شعاعی کهکشان با میانگین‌گیری از داده‌های ۵ تا ۱۰ به دست می‌آید.

$$v_r = 281\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$

در نهایت مقادیر سرعت دورانی بر حسب شعاع به دست می‌آید.

#	فاصله‌ی از مرکز (kpc)	سرعت دورانی ($km\ s^{-1}$)
۱	0.40	53
۲	1.60	89
۳	2.70	129
۴	3.80	145
۵	7.20	154
۶	10.10	149
۷	12.00	150
۸	15.70	151
۹	20.30	148
۱۰	27.40	152



شکل ۱۱